Corrigé liste d'exercices d'algèbre

des questions, commentaires, coquilles? adressez-vous à: *antoine.gournay@math.u-psud.fr*

4 décembre 2007

Exercice 4 : (a) La matrice A mange des gens écrit dans la base e_i $(i = 1,2,3)$ pour les ressortir dans la base f_j $(j = 1,2)$ de $\mathbb{R}^2$. Il suffit de trouver la matrice qui mange les e'_i et les expriment par des combinaison de e_i pour savoir comment l'application h mange les e'_i. La matrice de passage de e'_i vers e_i est

$$P = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 1 \\ 1 & 0 & 1 \\ 1 & 1 & 0 \end{pmatrix}$$

puisque $P(1,0,0)^\dagger = (0,1,1)^\dagger$ correspond bien à e'_1 est envoyé vers $e_2 + e_3$. La matrice A_1 recherchée est donc

$$A_1 = AP = \begin{pmatrix} 2 & -1 & 1 \\ 3 & 2 & -3 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 0 & 1 & 1 \\ 1 & 0 & 1 \\ 1 & 1 & 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & 3 & 1 \\ -1 & 0 & 5 \end{pmatrix}$$

(b) Cette fois-ci on exprime à l'aide d'une nouvelle matrice comment les f'_j deviennent des f_j :

$$Q = \frac{1}{2} \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 1 & -1 \end{pmatrix}$$

Cependant, ce qui nous intéresse c'est une fois que A_1 aura mangé des vecteurs écris en base e'_i et ressorti des vecteurs en base f_j, passé de la base f_j à la base f'_j. Il faut donc inverser Q :

$$Q^{-1} = -\begin{pmatrix} -1 & -1 \\ -1 & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 1 & -1 \end{pmatrix}$$

(Par un heureux hasard cette matrice est presque son propre inverse.) La matrice A_2 peut maintenant se calculer :

$$A_2 = Q^{-1}A_1 = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 1 & -1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 0 & 3 & 1 \\ -1 & 0 & 5 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -1 & 3 & 6 \\ 1 & 3 & -4 \end{pmatrix}$$

Exercice 5 : On va supposer que K contient les entiers (*c'àd.* , K contient au moins $\mathbb{Q}$) pour que l'application linéaire soit définie (elle est aussi définie sur les $\mathbb{F}_p$, mais le calcul pourrait devenir embêtant [pour $p = 2$ dans ce cas-ci] sans être plus instructif). L'application f s'écrit comme une matrice

$$A = \begin{pmatrix} 0 & 2 & -1 \\ 2 & -5 & 4 \\ 3 & -8 & 6 \end{pmatrix}$$

L'identité I_E s'écrit matriciellment par la matrice identité Id_3 de taille 3×3.

(a) Pour chercher le noyau de $f-I_E$, il faut trouver les vecteurs $(x,y,z)^\dagger$ (écrits dans la base e_1,e_2,e_3) qui satisfont

$$0=(A-\mathrm{Id}_3)\begin{pmatrix}x\\y\\z\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}-1&2&-1\\2&-6&4\\3&-8&5\end{pmatrix}\begin{pmatrix}x\\y\\z\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}-x+2y-z\\2x-6y+4z\\3x-8y+5z\end{pmatrix}$$

Ce système d'équation a pour solution $x=y=z$. Une base de $\mathrm{Ker}(f-I_E)$ est donc le vecteur $e_1+e_2+e_3$.

(b) La matrice de l'application f^2+I_E est

$$B=A^2+\mathrm{Id}_3=\begin{pmatrix}0&2&-1\\2&-5&4\\3&-8&6\end{pmatrix}\begin{pmatrix}0&2&-1\\2&-5&4\\3&-8&6\end{pmatrix}+\begin{pmatrix}1&0&0\\0&1&0\\0&0&1\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}1&-2&2\\2&-3&2\\2&-2&1\end{pmatrix}+\begin{pmatrix}1&0&0\\0&1&0\\0&0&1\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}2&-2&2\\2&-2&2\\2&-2&2\end{pmatrix}$$

Le noyau de cette matrice est formé des vecteurs $(x,y,z)^\dagger$ tels que $x-y+z=0$. Une base de cet espace est donnée par $(1,1,0)^\dagger$ et $(0,1,1)^\dagger$ (beaucoup d'autres choix sont valables).

(c) Même si on ne sait pas (encore) que ceci est une base, posons

$$e_1'=e_1+e_2+e_3, e_2'=e_1+e_2 \text{ et } e_3'=e_2+e_3.$$

Pour montrer que c'est une base il faut montrer leur indépendance linéaire. Pour ce faire, il suffit que le déterminant de la matrice dont les vecteurs qui expriment les e_i' en base e_i soit de déterminant non-nul. Incidemment, si c'est bien une base, cette matrice sera aussi la matrice de passage (la matrice qui mange des e_i' pour en ressortir l'expression en e_i)

$$P=\begin{pmatrix}1&1&0\\1&1&1\\1&0&1\end{pmatrix}$$

On calcule facilement son déterminant (en combinant des lignes, on se ramène au déterminant d'une matrice très simple) qui vaut 1. Ces nouveaux vecteurs forment bien une base. Pour avoir f dans cette base, on utilise P pour passer des e_i' aux e_i puis on applique A pour avoir le résultat de l'application (mais dans la base e_i !), et enfin, on utilise P^{-1} pour revenit à la base e_i'. Si A' est la matrice de f dans la base e_i' elle s'écrit donc

$$\begin{aligned}A'=P^{-1}AP\ &=\begin{pmatrix}1&-1&1\\0&1&-1\\-1&1&0\end{pmatrix}\begin{pmatrix}0&2&-1\\2&-5&4\\3&-8&6\end{pmatrix}\begin{pmatrix}1&1&0\\1&1&1\\1&0&1\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}1&-1&1\\0&1&-1\\-1&1&0\end{pmatrix}\begin{pmatrix}1&2&1\\1&-3&-1\\1&-5&-2\end{pmatrix}\\&=\begin{pmatrix}1&0&0\\0&2&1\\0&-5&-2\end{pmatrix}\end{aligned}$$

Par le choix de la nouvelle base $f(e_1')-I_E(e_1')=0\Leftrightarrow f(e_1')=e_1'$, ce qui correspond bien à ce qu'on trouve dans la matrice A'. D'autre part, la matrice de f^2 est

$$A^2=\begin{pmatrix}1&0&0\\0&-1&0\\0&0&-1\end{pmatrix}$$

ce qui correspond bien au choix de base : pour $i=2,3$, $f^2(e_i)=-I_E(e_i)=-e_i$.

Exercice 7 : (a) Soit $v, v' \in \mathbb{R}^3$, $v = (x,y,z)^\dagger$ et $v' = (x',y',z')$. Pour que ϕ soit une forme bilinéaire, il faut que, pour v fixé, $\phi(v,v')$ soit une application linéaire et que, pour v' fixé, $\phi(v,v')$ soit une application linéaire. Le plus simple est encore de trouver la matrice A telle que $\phi(v,v') = v^\dagger A v'$. En l'occurence on réécrit ϕ comme :

$$\phi(v,v') = xx' + y(2y'+2z') + z(2y'+z) = (x,y,z)\begin{pmatrix} x' \\ 2y'+2z' \\ 2y'+z' \end{pmatrix} = (x,y,z)\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 2 & 2 \\ 0 & 2 & 1 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} x' \\ y' \\ z' \end{pmatrix} = v^\dagger A v'$$

La forme quadratique associée à ϕ est $v \mapsto \phi(v,v)$. Ici c'est donc $v \mapsto x^2+2y^2+4yz+z^2 = x^2+2(y+z)^2-z^2$. Celle-ci admet des valeurs négatives, il ne s'agit donc pas d'un produit scalaire.
(b) Cette fois-ci on va exprimer q comme $v^\dagger B v$ pour une matrice B. La tâche nous est simplifiée ici car $q(x,y,z)$ est la norme du vecteur $\big(x, 3(x+y-z), z-y\big)$. Soit C la matrice qui envoie (x,y,z) sur $\big(x, 3(x+y-z), z-y\big)$,

$$C = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 3 & 3 & -3 \\ 0 & -1 & 1 \end{pmatrix}$$

alors, si $\langle \cdot,\cdot \rangle$ est le produit scalaire usuel de $\mathbb{R}^3$, $q(v) = \langle Cv, Cv \rangle = (Cv)^\dagger Cv = v^\dagger (C^\dagger C) v$. q est donc bien une forme quadratique, et sa forme bilinéaire associée est $\chi(v,v') = v^\dagger(C^\dagger C)v'$. Pour montrer qu'il s'agit bien d'une norme euclidienne, il faut vérifier que $q(v) \geq 0$ et $q(v) = 0 \Leftrightarrow v = 0$. Ici $q(v) \geq 0$ est évident car $q(v) = \|Cv\|^2 \geq 0$. Pour avoir que $q(v) = 0 \Leftrightarrow v = 0$, il faut vérifier que C n'a que 0 dans son noyau. Or ici, $\mathrm{Det} C = 0$, *c'àd.* le noyau de C n'est pas trivial. Ainsi q n'est pas une norme euclidienne.

Exercice 9 : On rappelle que ϕ^* est défini par la relation $\langle \phi v, w \rangle = \langle v, \phi^* w \rangle$. (Dans $\mathbb{R}^n$ avec sa norme usuelle * est la transposition, dans $\mathbb{C}^n$ c'est la transposition hermitienne.)
(a) Si ϕ est antisymétrique,

$$\langle \phi(x), x \rangle = \langle x, \phi^*(x) \rangle = \langle x, -\phi(x) \rangle = -\langle x, \phi(x) \rangle = -\langle \phi(x), x \rangle$$

d'où $\langle \phi(x), x \rangle = 0$, pour n'importe quel x.

Si $\forall x, \langle \phi(x), x \rangle = 0$ alors on pose $x = y+z$ et

$$\begin{aligned} 0 &= \langle \phi(y+z), y+z \rangle &&= \langle \phi(y)+\phi(z), y+z \rangle &&= \langle \phi(y), y \rangle + \langle \phi(z), y \rangle + \langle \phi(y), z \rangle + \langle \phi(z), z \rangle \\ &= \langle \phi(z), y \rangle + \langle \phi(y), z \rangle &&= \langle \phi(z), y \rangle + \langle z, \phi(y) \rangle &&= \langle \phi(z), y \rangle + \langle \phi^*(z), y \rangle \\ &= \langle \phi(z) + \phi^*(z), y \rangle \end{aligned}$$

Donc $\forall y \in E$, $\langle \phi(z)+\phi^*(z), y \rangle = 0$ ce qui implique que $\forall z \in E, \phi(z)+\phi^*(z) = 0$, ou autrement dit $\phi^*(z) = -\phi(z)$.
(b) Soit $(\mathrm{Ker}\phi)^\perp = \{x \in E | \forall y \in \mathrm{Ker}\phi, \langle x, y \rangle = 0\}$.

Montrons que $\mathrm{Im}\phi \subset (\mathrm{Ker}\phi)^\perp$, Soit $x \in \mathrm{Im}\phi$, alors il existe $z \in E$ tel que $\phi(z) = x$. Si $y \in \mathrm{Ker}\phi$,

$$\langle x, y \rangle = \langle \phi(z), y \rangle = \langle z, \phi^*(y) \rangle = \langle z, -\phi(y) \rangle = \langle z, 0 \rangle = 0.$$

Ainsi $x \in (\mathrm{Ker}\phi)^\perp$, d'où $\mathrm{Im}\phi \subset (\mathrm{Ker}\phi)^\perp$.

Montrons que $\mathrm{Im}\phi \supset (\mathrm{Ker}\phi)^\perp$. Pour ce faire, il est plus simple de montrer que $(\mathrm{Im}\phi)^\perp \subset \mathrm{Ker}\phi$. Effectivement, si $x \in (\mathrm{Im}\phi)^\perp$, alors $\forall y \in E$,

$$0 = \langle x, \phi(y) \rangle = \langle \phi^*(x), y \rangle = -\langle \phi(x), y \rangle$$

ainsi $\phi(x) = 0 \Rightarrow x \in \mathrm{Ker}\phi$.