# Die Riemannsche Hypothese

Janina Müttel und Pieter Moree

**Zusammenfassung**

Die Riemannsche Hypothese besagt, dass alle nichttrivialen Nullstellen der Zeta-Funktion den Realteil $\frac{1}{2}$ besitzen. Was diese Annahme bedeutet und warum sie sogar als eines der wichtigsten ungelösten Probleme in der Mathematik gilt, werden wir hier versuchen zu erklären.

Die Riemannsche Hypothese hat große Auswirkungen auf viele Gebiete der Mathematik. Besonders in der Zahlentheorie beginnen viele Beweise mit: „Wenn die Riemannsche Hypothese wahr ist, dann gilt...“. Eine der wichtigsten Anwendungen ist die Regelmäßigkeit der Verteilung der Primzahlen.

Eine Primzahl ist eine natürliche Zahl $> 1$, die nur durch sich selbst und durch 1 teilbar ist. Schon die Mathematiker im alten Griechenland beschäftigten sich mit diesen besonderen Zahlen und noch heute bereiten sie den Wissenschaftlern Kopfzerbrechen. Bestimmt wisst ihr, dass sich jede natürliche Zahl als Produkt von Primzahlen darstellen lässt, die sogenannte *Primfaktorenzerlegung*. Für den Aufbau der Primzahlen selbst gibt es jedoch kein bekanntes Gesetz. Die ersten Primzahlen (2, 3, 5, 7, 11, 13, 17, 19, 23, 29,...) kann man noch auswendig lernen, aber ab einer bestimmten Größe kann einer Zahl niemand mehr ansehen, ob sie eine Primzahl ist oder nicht (es sei denn, sie hat Teiler wie 2, 3 oder 5, die man sofort an der Endziffer bzw. Quersumme erkennen kann). Es ist nicht einmal so, dass Primzahlen immer in bestimmten Abständen auftauchen würden: Zum Beispiel gibt es zwischen 113 und 127 keine einzige Primzahl, zwischen 1 und 14 dagegen 6 Stück. Kann man also überhaupt irgendwelche Aussagen über Primzahlen treffen? Bekannt ist seit ca. 300 v. Chr., dass es unendlich viele Primzahlen gibt. Dies bewies der griechische Mathematiker Euklid folgendermaßen:

Wir nehmen an, dass es nicht unendlich viele Primzahlen gibt. Dann haben wir eine letzte Primzahl $q$, nach der keine andere mehr kommt, die also größer ist als alle anderen Primzahlen. Nun bilden wir das Produkt aller Primzahlen $\leq q$ und addieren 1 :

$$n = 2 \cdot 3 \cdot 5 \cdot 7 \cdot ... \cdot q + 1.$$

Die Zahl $n$ ist durch keine Primzahl teilbar, also auch durch keine andere Zahl (denn jede Zahl lässt sich in Primfaktoren zerlegen). Sie ist aber größer als 1, also muss $n$ selbst eine Primzahl sein. Also haben wir eine Primzahl gefunden, die größer als $q$ ist und somit einen Widerspruch zu unserer Annahme. Damit ist die Behauptung bewiesen, es gibt unendlich viele Primzahlen.

Bei so vielen Zahlen glauben die Mathematiker aber nicht mehr, dass sie völlig zufällig verteilt sind. Es muss doch einfach irgendein Gesetz geben oder zumindest Regelmäßigkeiten in der Verteilung! Bis heute kann man dazu nur sehr ungenaue Aussagen treffen. Die Riemannsche Hypothese würde dies ändern und viel dazu beitragen, das Verhalten der Primzahlen zu erklären (dazu später mehr). Wenn man die ersten bekannten Primzahlen betrachtet (es gibt mehr als 50 Millionen bekannte Primzahlen, aber noch viel mehr - unendlich viele - unbekannte), kann man schnell eine Vermutung anstellen. Zwischen 1 und 1000 gibt es 168 Primzahlen, 135 zwischen 1000 und 2000, 127 zwischen 2000 und 3000 und 120 zwischen 3000 und 4000. Gibt es also im Verhältnis immer weniger Primzahlen, je größer die Zahlen werden? Das ist tatsächlich der Fall, lässt sich aber allgemein besser untersuchen, wenn man die Primzahlen von 1 bis zur betrachteten Zahl $x$ zählt - diese Anzahl nennen wir $\pi(x)$ - und dann das Verhältnis zwischen $x$ und $\pi(x)$ betrachtet. Für die Funktion $\pi(x)$ ist keine einfache Formel bekannt, es lassen sich jedoch Annäherungen für das Verhältnis $x : \pi(x)$ finden. Eine der bekanntesten ist der *Primzahlsatz*:

$$\lim_{x \to \infty} \frac{\pi(x) \log x}{x} = 1 \Longleftrightarrow \pi(x) \sim \frac{x}{\log x}.$$

Diesen Satz hat der berühmte Mathematiker Gauß schon als 15jähriger vermutet. Bewiesen wurde er jedoch erst viel später und mit Hilfe der Zeta-Funktion, die auch in der Riemannschen Hypothese auftaucht. Der Satz beschreibt gut die Größenordnung der Funktion $\pi(x)$, nähert sie jedoch nicht genau genug an, um ihr Verhalten ganz zu erklären. Es bleibt immer noch der relativ große Fehler

$$\left|\pi(x) - \frac{x}{\log x}\right| > c_1 \frac{x}{(\log x)^2} \tag{1}$$

mit einer positiven Konstante $c_1$.

Eine bessere Näherung erhält man folgendermaßen: Gauß hat vermutet, dass die Wahrscheinlichkeit für eine Zahl $x$, prim zu sein, bei $\frac{1}{\log x}$ liegt. Nimmt man dies als Ausgangspunkt, dann erhält man als Anzahl der Primzahlen bis $x$ ungefähr

$$\frac{1}{\log 2} + \frac{1}{\log 3} + ... + \frac{1}{\log x}.$$

Das ist ungefähr das gleiche wie das *logarithmische Integral*

$$Li(x) = \int_2^x \frac{dt}{\log t}.$$

Auch für das logarithmische Integral gilt $\pi(x) \sim Li(x)$ und auch hier bleibt noch ein Fehler, den wir $E(x)$ nennen wollen:

$$E(x) := |\pi(x) - Li(x)|.$$

Wenn die Riemannsche Hypothese wahr ist, dann gilt

$$E(x) \leq c_2 \sqrt{x} \log x \tag{2}$$

mit einer Konstante $c_2$, der Fehler ist also viel kleiner als bei (1). Tatsächlich ist die Abschätzung (2) sogar äquivalent zur Riemannschen Hypothese.

Wenn die Riemannsche Hypothese wahr ist, liefert somit $Li(x)$ eine sehr gute Annäherung an $\pi(x)$. Das heißt, man könnte die Anzahl der Primzahlen bis zu einer beliebigen natürlichen Zahl sehr gut abschätzen, was natürlich für die Untersuchung der Verteilung der Primzahlen äußerst hilfreich wäre. Jetzt wissen wir also, dass die Riemannsche Hypothese wichtige Erkenntnisse über die Verteilung der Primzahlen liefert. Es ist aber noch unklar, was die Riemannsche Hypothese selbst bedeutet und woher der Zusammenhang mit den Primzahlen kommt.

Um das zu verstehen, betrachten wir zuerst die schon mehrfach genannte *Zeta-Funktion* $\zeta(s)$. Sie ist für *komplexe Zahlen* $s$ definiert. Das sind Zahlen von der Form $s = a + ib$, wobei $i$ die sogenannte *imaginäre Einheit* ist mit

$i^2 = -1$ und $a$, $b$ reelle Zahlen sind. $a$ wird der *Realteil* $Re(s)$ und $b$ der *Imaginärteil* $Im(s)$ genannt. Man kann komplexe Zahlen in einem normalen zweidimensionalen Koordinatensystem darstellen, indem man den Realteil auf der x-Achse (die dann *reelle Achse* genannt wird) und den Imaginärteil auf der y-Achse (*imaginäre Achse*) einträgt. Diese Bilder nennt man dann *komplexe Ebene* oder *Gaußsche Zahlenebene.* Für eine komplexe Zahl $s$ mit $Re(s) \geq 1$ ist

$$\zeta(s) = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^s} = 1 + \frac{1}{2^s} + \frac{1}{3^s} + ... \tag{3}$$

Man kann eine eindeutige Fortsetzung dieser Funktion finden, so dass sie für alle komplexen Zahlen außer $s = 1$ definiert ist (dass die Stelle $s = 1$ problematisch ist, kann man schon mit (3) vermuten, wo dann die divergente *Harmonische Reihe* entsteht). Einen Zusammenhang mit Primzahlen stellt die *Eulersche Produktformel* her:

$$\zeta(s) = \prod_p \frac{1}{1 - p^{-s}} = \frac{1}{1 - 2^{-s}} \cdot \frac{1}{1 - 3^{-s}} \cdot \frac{1}{1 - 5^{-s}} \cdot ...,$$

wobei das Produkt über alle Primzahlen $p$ läuft. Aus dieser Formel und einer weiteren Gleichung für $\zeta(s)$ (einer sogenannten *Funktionalgleichung*, die einen Zusammenhang zwischen $\zeta(s)$ und $\zeta(1 - s)$ herstellt) kann man schließen, dass $\zeta(s)$ die Nullstellen $-2, \ -4, \ -6, ...$ (also die negativen geraden Zahlen, die sogenannten *trivialen Nullstellen* der Zeta-Funktion) hat und dass alle anderen Nullstellen (die *nichttrivialen Nullstellen*) im sogenannten *kritischen Streifen* liegen. Der *kritische Streifen* ist die Menge aller komplexen Zahlen mit $0 \leq Re(s) \leq 1$. Nun verstehen wir die Riemannsche Hypothese: jede nichttriviale Nullstelle liegt auf der Linie $Re(s) = \frac{1}{2}$, der sogenannten *kritischen Linie.*

Die Abschätzung (2) für $E(x)$ haben wir damit allerdings noch nicht erklärt. Dafür wollen wir noch eine weitere Funktion einführen, nämlich

$$\begin{aligned} \psi(x) = \sum_{p^m \leq x} \log p &= m_1 \cdot \log p_1 + m_2 \cdot \log p_2 + ... \\ &= \left\lfloor \frac{\log x}{\log p_1} \right\rfloor \cdot \log p_1 + \left\lfloor \frac{\log x}{\log p_2} \right\rfloor \cdot \log p_2 \cdot ..., \end{aligned}$$

wobei die Summe über alle Primpotenzen (d.h. alle $p^m$ mit einer Primzahl $p$) $\leq x$ läuft. Die $m_j$ kann man ausrechnen, indem man sich klarmacht, dass

$m_j$ die größte ganze Zahl ist mit $p_j^{m_j} \leq x \Longleftrightarrow m_j \cdot \log p_j \leq \log x$. Also ist $m_j$ die größte ganze Zahl mit $m_j \leq \frac{\log x}{\log p_j}$ und das ist genau die Definition von $\left\lfloor \frac{\log x}{\log p_j} \right\rfloor$, dem *ganzen Anteil* von $\frac{\log x}{\log p_j}$.

Mit Hilfe der Funktion $\psi(x)$ kann eine relativ einfache Formel aufgestellt werden, die eine Beziehung zwischen den Primzahlen und den Nullstellen der Zeta-Funktion herstellt, die sogenannte *explizite Formel*:

$$\psi(x) = x - \sum_{\rho} \frac{x^\rho}{\rho} - \frac{\zeta'(0)}{\zeta(0)} - \frac{1}{2} \log(1 - \frac{1}{x^2}). \tag{4}$$

Die Summe läuft hier über alle Nullstellen $\rho$ der Zeta-Funktion, die im kritischen Streifen liegen. Die Summanden $-\frac{\zeta'(0)}{\zeta(0)}$, $-\frac{1}{2}\log(1-\frac{1}{x^2})$ sind nicht wichtig, denn $-\frac{\zeta'(0)}{\zeta(0)}$ ist konstant und $-\frac{1}{2}\log(1-\frac{1}{x^2})$ ist für große $x$ sehr klein. Deshalb können wir den rechten Teil in (4) vernachlässigen und betrachten

$$\psi(x) \approx x - \sum_{\rho} \frac{x^\rho}{\rho}.$$

Da $\rho$ eine komplexe Zahl ist (denn die Zeta-Funktion ist für komplexe Zahlen definiert), haben wir $\rho = a + ib$. Also gilt

$$x^\rho = x^{a+ib} = e^{(\log x)(a+ib)} = x^a \cdot e^{(\log x)ib}.$$

Es gibt noch eine andere Schreibweise für komplexe Zahlen, die wir nun benutzen wollen. In der komplexen Ebene hat jede Zahl einen Abstand zum Nullpunkt, den wir *Betrag* $r$ nennen, und einen Winkel $\varphi$ zur reellen Achse. Man kann eine komplexe Zahl $s$ damit schreiben als $s = r \cdot (\cos\varphi + i\ \sin\varphi)$ und es ist bekannt, dass dann auch gilt $s = r \cdot e^{i\varphi}$. Also können wir $x^\rho$ weiter umformen zu $x^\rho = x^a \cdot (\cos(b\log x) + i\sin(b\log x))$ und wir wissen nun, dass $x^a$ der Betrag von $x^\rho$ ist. Wenn die Riemannsche Hypothese wahr ist, gilt für alle $x^\rho$ in der Summe $x^\rho = x^{\frac{1}{2}+ib}$, also für den Betrag: $|x^\rho| = x^{\frac{1}{2}} = \sqrt{x}$. Aus der Formel (4) lässt sich damit schließen, dass $|\psi(x) - x|$ klein ist, wenn die Riemannsche Hypothese wahr ist. Es kann bewiesen werden, dass $\psi(x) \sim x$ äquivalent zum Primzahlsatz $\pi(x) \sim \frac{x}{\log x}$ ist. Mit $|x^\rho| = \sqrt{x}$ könnte man aber nicht nur diesen (schon bewiesenen) Grenzwert, sondern die genaue Fehlerabschätzung (2) für die viel bessere Annäherung $Li(x)$ herleiten. Ein Gefühl dafür kriegt man vielleicht folgendermaßen:

Wenn die Riemannsche Hypothese war ist und es im kritischen Streifen „nur" endlich viele Nullstellen $\rho$ gäbe, dann wäre

$$|\psi(x) - x| \approx |\sum_\rho \frac{x^\rho}{\rho}| \leq \sum_\rho \frac{\sqrt{x}}{|\rho|} \leq c_3\sqrt{x}$$

mit einer Konstante $c_3$, da die Summe nicht mehr von $x$ abhängt. Wenn die Riemannsche Hypothese nicht wahr wäre und es zum Beispiel eine Nullstelle mit $Re(s) = \frac{3}{4}$ gäbe, könnte man nur

$$|\psi(x) - x| \leq c_4 x^{\frac{3}{4}}$$

sagen, was natürlich eine viel schlechtere Abschätzung wäre (denn $\sqrt{x} < x^{\frac{3}{4}}$). Tatsächlich gibt es unendlich viele Nullstellen der Zeta-Funktion, die im kritischen Streifen liegen, was die Abschätzung viel komplizierter macht. Noch kleiner als für $Re(s) = \frac{1}{2}$ kann der Fehler nicht werden, weil man aus der Funktionalgleichung schließen kann, dass immer $\rho$ und $1-\rho$ gleichzeitig Nullstellen sind. So hätten wir zum Beispiel bei einer Nullstelle mit $Re(s) = \frac{1}{4}$ auch eine Nullstelle mit $Re(s) = \frac{3}{4}$. Also ist $\left|\sum_\rho \frac{x^\rho}{\rho}\right|$ am kleinsten, wenn *alle* Nullstellen auf der kritischen Linie liegen - was genau dann der Fall ist, wenn die Riemannsche Vermutung zutrifft.

Übrigens kann man die Schreibweise $x^\rho = x^a \cdot (\cos(b \log x) + i \sin(b \log x))$ auch so interpretieren, dass die $x^\rho$ Schwingungen beschreiben - vielleicht habt ihr eine ähnliche Gleichung schon in der Physik gesehen. Dann ist aber $\psi(x)$ als Summe dieser $x^\rho$ eine Überlagerung von Schwingungen, also eine Welle. Damit besteht sogar ein Zusammenhang zwischen der Zeta-Funktion und der Physik. Auch Musik entsteht als Überlagerung von Schwingungen und deshalb wird manchmal gesagt, dass (4) die „Musik der Primzahlen" beschreibt.

Für unseren Ansatz ist aber wichtig, dass man mit der expliziten Formel Fragen über Primzahlen auf Fragen über Nullstellen der Zeta-Funktion reduzieren kann. Über die Verteilung der nichttrivialen Nullstellen weiß man inzwischen, dass unendlich viele von ihnen auf der kritischen Linie $Re(s) = \frac{1}{2}$ liegen. Außerdem ist bewiesen worden, dass mindestens $\frac{2}{5}$ aller Nullstellen im kritischen Streifen tatsächlich auf der kritischen Linie liegen. Ob es aber doch noch Nullstellen gibt, die neben dieser Linie liegen und ob somit die Riemannsche Hypothese nicht wahr ist, konnte bis heute niemand beweisen. Die einzige bekannte Einschränkung für den kritischen Streifen ist, dass es keine Nullstellen von $\zeta(s)$ gibt mit $Re(s) = 1$. Diese Tatsache ist äquivalent zum Primzahlsatz. Aber man konnte bis jetzt für keine Zahl $\delta < 1$ zeigen, dass $\zeta(s)$ keine Nullstellen hat mit $Re(s) > \delta$. Die Riemannsche Hypothese ist auf Hilberts berühmter Liste der im Jahr 1900 ungelösten Probleme die Nummer acht und für einen Beweis ist ein Preisgeld von einer Million Dollar ausgesetzt.

Riemann hat übrigens nicht einfach zufällig eine interessante Vermutung angestellt. Zwar hat schon Euler die Zeta-Funktion studiert, aber Riemann war der erste, der $\zeta(s)$ als Funktion einer komplexen Variable betrachtet hat. Erst diese Ansicht hat es möglich gemacht, tiefliegende Resultate über Primzahlen zu beweisen. In einer sehr kurzen Arbeit von 1859 hat Riemann dann eine explizite Formel für $\pi(x)$ genannt, die analog zu (4), aber viel komplizierter ist. Nebenbei hat er in dieser Arbeit auch seine bekannte Riemannsche Vermutung gemacht. Riemanns Arbeit wird heute als der Anfang der sogenannten *analytischen Zahlentheorie* gesehen. In diesem Teilgebiet der Zahlentheorie werden Methoden aus der Analysis benutzt, um zahlentheoretische Aussagen zu beweisen. Die von Riemann entwickelten Methoden haben sich hier als sehr nützlich erwiesen.

## Literaturhinweise

In der letzten Zeit sind drei populärwissenschaftliche Bücher über die Riemannsche Hypothese erschienen. In [1] wird Riemanns Arbeit für Leser mit geringen mathematischen Kenntnissen erklärt. In [2] geht es auch um die Riemannsche Hypothese. Hier stehen aber im Mittelpunkt einige heutige Zahlentheoretiker und die Frage, was diese motiviert, sich mit so schwierigen Problemen wie der Riemannschen Hypothese zu beschäftigen. In [3] geht es um mehr als die Riemannsche Hypothese, nämlich um die Primzahltheorie und ihre Geschichte. Ausführlich werden diese Bücher zum Beispiel in [4] besprochen. Über Primzahlen und ihre Verteilung gibt es auch den sehr schön geschriebenen Artikel [5].

## Dankwort

Diese Arbeit ist während eines Praktikumsaufenthaltes von Janina Müttel (unter Betreuung von Pieter Moree) am Max-Planck-Institut für Mathematik (MPIM) in Bonn entstanden. Beide empfinden es als Privileg, in der inspirierenden Atmosphäre des MPIM verweilen zu dürfen.

# Literatur


[1] J. Derbyshire, Prime obsession, Joseph Henry Press 2003, ISBN 0-309-08549-7.

[2] H. Sabbagh, Dr. Riemann's zeros, Farrar, Strauss and Giroux 2003, ISBN 0-374-25007-3.

[3] M. du Sautoy, The music of the primes, Harper Collins 2003, ISBN 0-06-621070-4.

[4] P. Moree, De nulpunten van Riemann, Nieuw Arch. voor Wiskunde, Maart 2005.

[5] D. Zagier, Die ersten 50 Millionen Primzahlen, Mathematische Miniaturen 1, Birkhäuser 1981, ISBN 3-7643-1203-3.