Die liebe Verwandtschaft

Christine Jost

Was ist das? Sie sind sich sehr ähnlich und treten immer gemeinsam auf. Sie sind sehr selten, aber man trifft trotzdem immer wieder auf sie. Es gibt sie in groß und in klein.

Wer jetzt gedacht hat „Zwillinge“, der hat goldrichtig geraten. Um menschliche Zwillinge soll es aber vorerst nicht gehen, sondern um sogenannte Primzahlzwillinge. Denn auch unter den Primzahlen gibt es Paare, die sich sehr ähnlich sehen und immer gemeinsam auftreten, wenn auch vergleichsweise selten. Doch was bedeutet „sich ähnlich sehen“?

Unter den Primzahlen gibt es zwei, die den Abstand 1 voneinander haben, nämlich 2 und 3. Es sind die einzigen mit dieser Eigenschaft, weil bei aufeinanderfolgenden Zahlen immer eine durch zwei teilbar sein muss. Es gibt allerdings eine ganze Menge von Primzahlpaaren, die den Abstand 2 voneinander haben. Die kleinsten sind (3,5), (5,7), (11,13), (17,19), (29,31) und so weiter. Solche Paare werden Primzahlzwillinge genannt und wir wollen dies auch gleich ordentlich definieren:

Definition: Ein Primzahlzwilling ist ein Paar $(p, p+2)$ von natürlichen Zahlen, so dass sowohl p als auch $p+2$ Primzahlen sind.

Bei der Suche nach weiteren Primzahlzwillingen hilft folgende Eigenschaft ein wenig: Ein Paar (x, y) von natürlichen Zahlen mit $x > 3$ kann nur dann ein Primzahlzwilling sein, wenn x beim Teilen durch 6 den Rest 5 lässt und y folglich den Rest 1. Dies lässt sich leicht beweisen. Man muss nur zeigen, dass bei allen anderen Kombinationen mindestens eine der beiden Zahlen durch 2 oder 3 teilbar sein muss und deshalb keine Primzahl sein kann. Wenn man nämlich die möglichen Reste für x betrachtet, so scheiden 0, 2 und 4 sofort aus, weil x sonst durch 2 teilbar wäre. Ebenso schnell kann man den Rest 3 ausschließen, da sich x sonst durch 3 teilen ließe. Und auch die 1 kann als Rest von x nicht auftreten, da sonst y den Rest 3 ließe und durch 3 teilbar wäre. Also bleibt als einzige Möglichkeit für x der Rest 5 übrig. Damit lässt y den Rest 1 und der Satz ist bewiesen

Man kann Primzahlzwillinge auch auf eine andere, sehr verblüffende Weise charakterisieren. Wir benötigen dafür zunächst zwei Bezeichnungen: Für $n \in \mathbb{N}$ bezeichne $\varphi(n)$ die Anzahl aller natürlichen Zahlen $1 \leq m < n$, die teilerfremd zu n sind. Zum Beispiel ist $\varphi(15) = 8$, da 1,2,4,7,8,11,13 und 14 teilerfremd zu 15 sind. Außerdem bezeichne $\sigma(n)$ die Summe aller Teiler von n. Also ist $\sigma(15) = 1+3+5+15 = 24$. Nun können wir die Bedingung formulieren:

Sei $n \in \mathbb{N}$. Dann ist n genau dann das Produkt zweier Primzahlen p und p', so dass (p, p') ein Primzahlzwilling ist (also $p' = p+2$), wenn $\varphi(n)\sigma(n) = (n-3)(n+1)$ ist. Für unser Beispiel 15 gilt: $\varphi(15)\sigma(15) = 8 \cdot 24 = 192 = 12 \cdot 16 = (15-3)(15+1)$. Dies sollte uns auch nicht verwundern, schließlich ist ja $15 = 3 \cdot 5$ und (3,5) ist ein Primzahlzwilling.

Diese Charakterisierung wollen wir hier jedoch nicht beweisen. Wie für andere nette Charakterisierungen gilt außerdem leider auch für diese, dass sie von keinem praktischen Nutzen ist. Zugegebenermaßen: Die allermeisten Menschen werden denken, dass nur ganz wenige mathematische Sätze einen praktischen Nutzen haben und daß die Welt viel schöner wäre, wenn die Mathematiker stattdessen lieber Kriegsverhinderungsmaschinen erfinden würden, oder doch wenigstens so etwas wie Spülmaschinen – also etwas, das das Leben ein bisschen angenehmer macht. Aber zum Einen könnte man die allermeisten Maschinen nicht bauen, wenn man nicht vorher sehr lange Berechnungen angestellt hätte, wie die Maschine funktionieren muss. Und auch wenn man den Nutzen eines mathematischen Satzes heute noch nicht erkennt, kann er in vielen Jahren sehr wichtig werden. Zum Beispiel ist es gut, daß man heute sehr viel über Primzahlen weiß, weil sie wichtig sind, um Daten beispielsweise über das Internet sicher übertragen zu können. Und zum Anderen messen Mathematiker den Nutzen eines Satzes nicht daran, wieviel direkten Nutzen er für die Menschen hat, sondern daran, wie sehr er dabei hilft, andere Sätze zu beweisen.

Aber welche Sätze möchte man denn über Primzahlzwillinge gerne beweisen? Dazu muss man zuerst noch ein bisschen mehr erzählen:

Die ersten Primzahlzwillinge haben wir schon genannt. Wenn man weiter sucht, stellt sich heraus, dass es sehr viele Primzahlzwillinge gibt. Das größte bisher gefundene Paar $33218925 \cdot 2^{169690} \pm 1$ besteht aus 51090-stelligen Zahlen und wurde im Jahre 2002 entdeckt. Aber die Entdeckung von immer größeren Primzahlzwillingen löst nicht die Frage, ob es unendlich viele davon gibt. Dass es unendlich viele Primzahlen gibt, lässt sich leicht beweisen – der erste Beweis wurde schon im Jahre 300 v.Chr. von Euklid gefunden und seitdem kamen noch ungefähr hundert mehr oder weniger verschiedene Beweise hinzu. Aber ob es unendlich viele Primzahlzwillinge gibt, ist eines der bekanntesten ungelösten mathematischen Probleme. Es ist wirklich vertrackt, denn das Problem lässt sich sehr leicht formulieren („Gibt es unendlich viele Primzahlen p, so dass $p+2$ ebenfalls eine Primzahl ist?“). Aber die Lösung scheint für unseren menschlichen Geist sehr sehr schwer zu sein. Denn bis jetzt hat noch kein Mathematiker eine Lösung gefunden, obwohl es viele kluge Menschen versucht haben. Erst vor kurzem, im Jahre 2004, haben Daniel Goldston und Cem Yildirim vom American Institute of Mathematics einen „Beweis“ dieser Vermutung veröffentlicht. Leider wurde wenige Monate danach festgestellt, dass der „Beweis“ einen Fehler enthält, der sich nicht verbessern ließ. Dennoch ist er von großer Bedeutung, weil sie darin mathematische Methoden entwickelt haben, mit denen man anscheinend nicht dieses, aber vielleicht andere schwierige Probleme lösen kann. Ein interessanter Artikel dazu findet sich unter http://www.maa.org/devlin/devlin_05_03.html, leider ist er auf Englisch. Und die Geschichte geht weiter: Am 26. Mai 2004 veröffentlichte der amerikanische Mathematiker Richard Arenstorf ebenfalls einen Beweis der Primzahlzwillingsvermutung – und auch dieser stellte sich als falsch heraus. Aber vielleicht dauert es ja nicht mehr lange, bis diese Vermutung doch noch bewiesen wird. Auch Andrew Wiles musste zunächst einen Fehler verbessern, bevor er 1994 endlich Fermats letzten Satz bewiesen hatte – ein Satz, der vor diesem Beweis als genauso schwer galt wie die Vermutung über Primzahlzwillinge.

Doch genug der Exkurse, was weiß man denn sicher über Primzahlzwillinge und kann es nicht bloß vermuten? Zum Beispiel folgendes:

Man weiß schon seit längerem, dass die Summe der Kehrwerte aller Primzahlen divergiert, das heißt die Summe

$$\frac{1}{2} + \frac{1}{3} + \frac{1}{5} + \frac{1}{7} + \frac{1}{11} + \ldots + \frac{1}{p} = \sum_{\substack{q \text{ Primzahl,} \\ q \leq p}} \frac{1}{q}$$

kann beliebig groß werden, je nachdem wie man das p wählt. Man sagt auch, dass die unendliche Reihe

$$\frac{1}{2}+\frac{1}{3}+\frac{1}{5}+\frac{1}{7}+\frac{1}{11}+\ldots=\sum_{q\ \text{Primzahl}}\frac{1}{q}$$

gegen unendlich geht. Dies ist auch ein Beweis dafür, dass es unendlich viele Primzahlen gibt. Denn gäbe es nur endlich viele Primzahlen, könnte man die Summe ihrer Kehrwerte berechnen und sie könnte nicht beliebig groß werden.

Anders steht es jedoch mit den Primzahlzwillingen. Die Summe

$$\sum_{p,p+2\ \text{Primzahlen}}(\frac{1}{p}+\frac{1}{p+2})$$

konvergiert. Das heißt, dass es eine Konstante B gibt, so dass

$$\sum_{\substack{p,\ p+2\\ \text{Primzahlen},\, p<q}}(\frac{1}{p}+\frac{1}{p+2})$$

je nach Wahl von q beliebig nahe bei B liegt. Man schreibt auch:

$$B=\sum_{p,p+2\ \text{Primzahlen}}(\frac{1}{p}+\frac{1}{p+2}).$$

Die Konstante B ist bekannt und heißt nach ihrem Entdecker Viggo Brun *Brunsche Konstante.* Man kann sie sogar berechnen, zumindest die ersten Stellen: $B = 1,902160577783278\ldots$

Dass diese Reihe konvergiert, heißt aber noch lange nicht, dass es nur endlich viele Primzahlzwillinge gibt, sondern nur, dass die Beweismethode hier nicht funktioniert. Auch die Summation von unendlich vielen Summanden kann ein Ergebnis haben; zum Beispiel gilt

$$\frac{1}{1}+\frac{1}{2}+\frac{1}{4}+\frac{1}{8}+\cdots+\frac{1}{2^n}+\cdots=\sum_{k=0}^{\infty}\frac{1}{2^k}=2.$$

In diesem Zusammenhang hatten Primzahlzwillinge sogar wirklich sehr praxisrelevante Auswirkungen: Im Jahre 1995 versuchte Nicely, möglichst viele Stellen der Brunschen Konstante zu berechnen und verwendete dafür zwei Computer von verschiedener Bauart. Eigentlich hätten beide Computer das gleiche Ergebnis liefern müssen, aber das war merkwürdigerweise nicht der Fall. Aus irgendeinem Grund wurden die Kehrwerte von 824.633.702.441 und 824.633.702.443 falsch berechnet. Nicely stellte schließlich fest, dass dies an einem Baufehler bei einem der beiden verwendeten Computer lag und teilte dies der Herstellerfirma mit. Die Firma ließ sofort alle Computer dieser Bauart umtauschen ... und stellte Nicely ein, denn wer solche Fehler findet, der muss auch gut im Vermeiden von Fehlern sein.

Es ist aber nicht nur interessant, ob es unendlich viele Primzahlzwillinge gibt, sondern auch, wie oft diese vorkommen. Oder genauer ausgedrückt: Bezeichne $\pi_2(x)$ die Anzahl der Primzahlzwillinge $(p, p+2)$ mit $x \in \mathbb{N}$, $p < x$. Wie groß ist $\pi_2(x)$ für gegebenes $x \in \mathbb{N}$?

Zuerst wollen wir aber die gleiche Frage für ganz gewöhnliche Primzahlen betrachten: Bezeichne $\pi(x)$ die Anzahl aller Primzahlen p mit $p < x$, $x \in \mathbb{N}$. Es wäre natürlich schön, wenn man eine einfache Formel für $\pi(x)$ angeben könnte, denn dann könnte man sehr viel einfacher alle Primzahlen bis zu einem bestimmten Wert bestimmen. Wenn man aber auf eine Tabelle mit allen Primzahlen kleiner als beispielsweise 100 blickt (Tabelle 1), so scheint es keine einfache Formel dafür zu geben.

1	**2**	**3**	4	**5**	6	**7**	8	9	10
11	12	**13**	14	15	16	**17**	18	**19**	20
21	22	**23**	24	25	26	27	28	**29**	30
31	32	33	34	35	36	**37**	38	39	40
41	42	**43**	44	45	46	**47**	48	49	50
51	52	**53**	54	55	56	57	58	**59**	60
61	62	63	64	65	66	**67**	68	69	70
71	72	**73**	74	75	76	77	78	**79**	80
81	82	**83**	84	85	86	87	88	**89**	90
91	92	93	94	95	96	**97**	98	99	100

Tabelle 1: Die natürlichen Zahlen kleiner gleich 100, Primzahlen fett gekennzeichnet.

Verblüffenderweise gibt es dennoch eine Formel, die zumindest ungefähr angibt, wie die Primzahlen verteilt sind. Man kann nämlich zeigen, dass sich $\pi(x)$ ungefähr so verhält wie die Funktion $\frac{x}{\log x}$, genauer gesagt gilt

$$\lim_{x\to\infty} \frac{\pi(x)\log x}{x} = \lim_{x\to\infty} \frac{\pi(x)}{\frac{x}{\log(x)}} = 1.$$

Dies bedeutet, dass $\pi(x)$ umso besser durch $\frac{x}{\log x}$ angenähert wird, je größer x ist. Das zeigt auch die Tabelle[1] 2.

x	$\pi(x)$	$\frac{x}{\log x}$	$\frac{\pi(x)\log x}{x}$
10	4	4,3	0,93
10^2	25	21,7	1,15
10^3	168	144,8	1,16
10^4	1.229	1.086	1,13
10^5	9.592	8.686	1,10
10^6	78.498	72.382	1,08
10^7	664.579	620.420	1,07
10^8	5.761.455	5.428.681	1,06
10^9	50.847.534	48.254.942	1,05
10^{10}	455.052.511	434.294.482	1,048

Tabelle 2: Verteilung der Primzahlen kleiner als 10^{10}

Eine solche Funktion würde man auch sehr gerne für Primzahlzwillinge finden, d.h. man wüsste gerne auch für Primzahlzwillinge etwas genauer über ihre Verteilung Bescheid. Das erste Ergebnis erzielte hierbei der schon erwähnte Viggo Brun. Er zeigte 1920, dass für genügend große x gilt, dass

$$\pi_2(x) < \frac{100x}{(\log x)^2}\,.$$

„Genügend groß“ ist eine verkürzte Sprechweise dafür, dass eine Konstante C existiert, so dass obige Abschätzung für alle $x > C$ wahr ist. Diese Abschätzung ist leider nur eine Abschätzung

[1] entnommen aus: Tom Apostol, Introduction to Analytic Number Theory

von oben. Sie zeigt also nur, dass Primzahlzwillinge auch dann, wenn es unendlich viele von ihnen gibt, sehr selten sein müssen. Immerhin wurde sie seitdem mehrmals verbessert, indem gezeigt wurde, dass man die Zahl 100 auch viel kleiner wählen kann und die Abschätzung trotzdem stimmt; zum Beispiel 1966 von Bombieri und Davenport zu

$$\pi_2(x) \leq 8.01 \cdot C_2 \frac{x}{(\log x)^2}$$

für genügend große x.

C_2 bezeichnet hierbei die sogenannte Primzahlzwillingskonstante. Ihr Wert ist $\prod(1 - \frac{1}{(p-1)^2})$, wobei p über alle ungeraden Primzahlen läuft; also

$$C_2 = (1 - \frac{1}{(3-1)^2})(1 - \frac{1}{(5-1)^2})(1 - \frac{1}{(7-1)^2})(1 - \frac{1}{(11-1)^2}) \ldots = 0,66016\ldots$$

Die britischen Mathematiker Hardy und Littlewood äußerten die Vermutung, dass man aus dieser Abschätzung auch eine Approximation von $\pi_2(x)$ erhalten kann, ähnlich wie $\frac{x}{\log x}$ eine Approximation von $\pi(x)$ ist. Man muss nur die 8.01 durch eine 2 ersetzen:

$$\pi_2(x) \sim 2\, C_2 \frac{x}{(\log x)^2}.$$

Dies erscheint auch naheliegend, wenn man die Tabelle[2] 3 betrachtet:

x	$\pi_2(x)$	$\frac{x}{(\log x)^2}$	$\frac{\pi_2(x)(\log x)^2}{x}$
10^3	35	21	1,67
10^4	205	118	1,74
10^5	1.224	754	1,62
10^6	8.169	5.239	1,56
10^7	58.980	38.492	1,53
10^8	440.312	294.706	1,49
10^9	3.424.506	2.328.540	1,47
10^{10}	27.412.679	18.861.170	1,45
10^{11}	224.376.048	155.877.436	1,44
10^{12}	1.870.585.220	1.309.803.451	1,43
10^{13}	15.834.664.872	11.160.455.440	1,42
10^{14}	135.780.321.665	96.230.457.650	1,41

Tabelle 3: Verteilung der Primzahlzwillinge kleiner als 10^{14}

Es gibt noch andere Argumente, die diese Approximation als richtig erscheinen lassen. Sie mögen in unsrer Darstellung manchmal etwas weit hergeholt erscheinen, lassen sich aber durchaus mathematisch begründen.

Zuerst einmal überlegt man sich, wie groß für eine natürliche Zahl x die Wahrscheinlichkeit ist, dass x eine Primzahl ist. Der Primzahlsatz besagt ja, dass

$$\sum_{p \leq x,\, p \text{ prim}} 1 \sim \frac{x}{\log x},$$

[2] Werte von $\pi_2(x)$ entnommen aus: Paulo Ribenboim, The New Book of prime Number Records

also ist die „Wahrscheinlichkeit", dass x eine Primzahl ist, gleich

$$\sum_{p\leq x,\, p \text{ prim}} 1 - \sum_{p\leq x-1,\, p \text{ prim}} 1 \approx \frac{x}{\log x} - \frac{x-1}{\log(x-1)} \approx \frac{1}{\log x},$$

da $\log(x-1) \approx \log x$. Nimmt man an, dass die Wahrscheinlichkeit dafür, dass x eine Primzahl ist, unabhängig ist von der Wahrscheinlichkeit dafür, dass $x+2$ eine Primzahl ist, dann erhält man für die Wahrscheinlichkeit, dass $(x, x+2)$ ein Primzahlzwilling ist $\frac{1}{\log x} \cdot \frac{1}{\log(x+2)}$. Da diese Ereignisse aber eben nicht unabhängig sind, muss man die Wahrscheinlichkeit noch mit einer positiven Konstante c versehen: Die Wahrscheinlichkeit, dass $(x, x+2)$ ein Primzahlzwilling ist, beträgt ungefähr $c \cdot \frac{1}{\log x} \cdot \frac{1}{\log(x+2)} \approx c \cdot \frac{1}{(\log x)^2}$. Damit erhält man

$$\begin{aligned} \pi_2(x) &= \sum_{p\leq x,\, p,\, p+2 \text{ prim}} 1 \approx c \cdot \sum_{k \leq x} \frac{1}{(\log k)^2} \\ &\approx c \int_2^x \frac{\mathrm{d}t}{(\log t)^2} \approx c \frac{x}{(\log x)^2}, \end{aligned}$$

da $\frac{1}{(\log t)^2}$ auf dem größten Teil des Intervalls [2,x] sehr nahe bei $\frac{1}{(\log x)^2}$ liegt. Wählt man in dieser Formel nun $c = 2\,C_2$, so erhält man die Approximation, die wir plausibel machen wollten.

Um es noch einmal zu betonen: diese Abschätzungen mögen zwar extrem unexakt erscheinen. Man kann sie jedoch durchaus mathematisch begründen, nur würde dies bei Weitem den Rahmen sprengen.

Übrigens lässt sich mit obiger Approximation zeigen, dass die Summe der Kehrwerte der Primzahlzwillinge konvergiert. Denn die Summe

$$\sum_{p,\, p+2 \text{ Primzahlen}} \left(\frac{1}{p} + \frac{1}{p+2}\right)$$

lässt sich auch schreiben als

$$\sum_{x=2}^{\infty} (\pi_2(x) - \pi_2(x-1))\left(\frac{1}{x} + \frac{1}{x+2}\right).$$

Dies liegt daran, dass gilt

$$\pi_2(x) - \pi_2(x-1) = \begin{cases} 1 & \text{falls } (x, x+2) \text{ Primzahlzwilling,} \\ 0 & \text{sonst} \end{cases}$$

und 1 keine Primzahl ist, also aus der Summation ausgeschlossen werden kann. Nach obiger Approximation ist aber $\pi_2(x) \approx \frac{x}{(\log x)^2}$ und demnach

$$\begin{aligned} \pi_2(x) - \pi_2(x-1) &\approx \frac{x}{(\log x)^2} - \frac{x-1}{(\log(x-1))^2} \\ &\approx \frac{x}{(\log x)^2} - \frac{x-1}{(\log x)^2} \approx \frac{1}{(\log x)^2}. \end{aligned}$$

Die Approximation von $\log(x-1)$ durch $\log x$ ist möglich, da der Logarithmus deutlich langsamer wächst als x. Damit kann man schreiben

$$\begin{aligned}\sum_{p,p+2 \text{ Primzahlen}} \left(\frac{1}{p}+\frac{1}{p+2}\right) &\approx \sum_{x=2}^{\infty} \frac{1}{(\log x)^2}\left(\frac{1}{x}+\frac{1}{x+2}\right) \\ &\approx 2\sum_{x=2}^{\infty} \frac{1}{(\log x)^2}\frac{1}{x} = 2\sum_{x=2}^{\infty} \frac{1}{x(\log x)^2}.\end{aligned}$$

Die Konvergenz dieser Summe ist äquivalent zur Konvergenz des entsprechenden Integrals

$$\int_2^{\infty} \frac{\mathrm{d}x}{x(\log x)^2} = -\frac{1}{\log x}\Big|_2^{\infty} = \frac{1}{\log 2}.$$

Da das Integral konvergiert, konvergiert also auch die Summe. Übrigens zeigt dieses Ergebnis, warum es den Mathematikern so wichtig ist, etwas über die Verteilung der Primzahlen bzw. Primzahlzwillinge zu wissen. Denn weiß man diese Verteilung, lassen sich auch eine Anzahl von anderen Fragen leichter beantworten, wie wir anhand dieses Beispiels gesehen haben.

Festzuhalten bleibt aber, dass wir über Primzahlzwillinge schon einiges wissen, aber vieles dennoch im Dunkeln bleibt. Übrigens ist dies für die gesamte Familie der Fall, denn diese ist noch viel größer und umfasst sogar Drillinge und Vierlinge.

Dabei ist ein Primzahldrilling ein Tripel der Form $(p, p+2, p+6)$ oder der Form $(p, p+4, p+6)$, so dass $p, p+2$ und $p+6$ bzw. $p, p+4$ und $p+6$ Primzahlen sind. Beispiele für Primzahldrillinge sind $(5, 7, 11)$ oder $(13, 17, 19)$. Man kann sich leicht überlegen, dass es nur ein einziges Tripel von Primzahlen der Form $(p, p+2, p+4)$ geben kann, da eine dieser drei Zahlen immer durch drei teilbar sein muss. Das einzige Tripel dieser Form ist also (3,5,7). Insofern ist es sinnvoll, Primzahldrillinge wie oben zu definieren und nicht als Tripel $(p, p+2, p+4)$, denn über ein einziges Tripel zu reden ist nicht gerade sehr spannend. Man kann das Ganze auch noch weiter fortsetzen: Ein Primzahlvierling ist ein 4-Tupel der Form $(p, p+2, p+6, p+8)$, besteht also aus zwei Primzahlzwillingen im Abstand vier. Für Primzahlvierlinge gilt, dass $p+4$ immer durch 15 teilbar ist. Daraus folgt außerdem, dass die Summe aller Zahlen des Vierlings $(p+(p+2)+(p+6)+(p+8) = 4p+16 = 4\cdot(p+4))$ immer durch 4 und durch 15 teilbar ist. Man weiß außerdem, dass

$$\sum_{\substack{p,p+2,p+6 \\ \text{Primzahlen}}} \left(\frac{1}{p}+\frac{1}{p+2}+\frac{1}{p+6}\right),$$

$$\sum_{\substack{p,p+4,p+6 \\ \text{Primzahlen}}} \left(\frac{1}{p}+\frac{1}{p+4}+\frac{1}{p+6}\right) \text{ und}$$

$$\sum_{\substack{p,p+2,p+6,p+8 \\ \text{Primzahlen}}} \left(\frac{1}{p}+\frac{1}{p+2}+\frac{1}{p+6}+\frac{1}{p+8}\right)$$

konvergieren und auch, gegen welchen Wert. Dass sie konvergieren ist nicht schwer zu zeigen, weil die Summen jeweils kleiner sein müssen als die analoge Summe für Primzahlzwillinge und diese konvergiert. Ob es unendlich viele Primzahldrillinge und -vierlinge gibt, weiß man aber wiederum nicht, genau wie bei den Primzahlzwillingen. Man weiß nicht einmal, ob aus der Existenz von unendlich vielen Primzahlzwillingen die Existenz von unendlich vielen Primzahldrillingen oder -vierlingen folgen würde.

Doch eine Tatsache lässt sich vergleichsweise leicht beweisen: Es gibt beliebig große Lücken zwischen Primzahlen. Das heißt, dass für jede natürliche Zahl m eine Zahl $x \in \mathbb{N}$ existiert, dass jede der m Zahlen $x, x+1, \ldots, x+m-1$ zusammengesetzt, also keine Primzahl, ist. Diesen Satz hat man bewiesen, wenn man für jedes m ein x mit der geforderten Eigenschaft findet. Ein solches x ist $(m+1)! + 2 = 1 \cdot 2 \cdot 3 \cdot \ldots \cdot (m-1) \cdot m \cdot (m+1) + 2$. Da sich x auch als $2 \cdot (3 \cdot 4 \cdot \ldots \cdot m \cdot (m+1) + 1)$ schreiben lässt, sieht man, dass x durch 2 teilbar ist und deshalb keine Primzahl sein kann. Aber auch $x + 1 = (m+1)! + 3$ ist keine Primzahl, weil $x+1$ durch 3 teilbar ist. Ebenso ist $x+2$ durch 4 teilbar. Und so kann man weitermachen bis schließlich $x + m - 1$ sich als durch $m + 1$ teilbar herausstellt und damit der Satz bewiesen ist. Vor diesem Hintergrund erscheint es umso erstaunlicher, dass es auch unter den immer größeren Zahlen Primzahlzwillinge geben soll, die ja nur den sehr kleinen Abstand 2 haben.

Zwei Primzahlzwillinge ganz anderer Art waren die Zwillinge John und Michael, die in den 60er Jahren geradezu berühmt waren für ihre Fähigkeit, zu jedem beliebigen ihnen genannten Datum sofort den Wochentag nennen zu können und damit durch die verschiedensten Fernsehshows tourten. Das erstaunliche daran war, dass sie ansonsten als autistisch oder geistig behindert erschienen: Sie beherrschten, obwohl schon über zwanzig Jahre alt, nicht einmal einfache Alltagsfähigkeiten, wie z.B. Busfahren. Noch viel merkwürdiger ist, dass sie auch nicht einmal Kopfrechnen konnten – auch nicht einfachste Additionen oder Multiplikationen. Es ist also höchst unwahrscheinlich, dass sie eine schnelle Rechenmethode zur Ermittlung dieser Wochentage gefunden haben, sondern sie müssen auf irgendeine andere Weise die Wochentage geradezu „gesehen“ haben. Diese Fähigkeit deutet aber nur sehr oberflächlich auf ihre einzigartigen Fähigkeiten hin. Der Neuropsychologe Oliver Sacks berichtet in seinem Buch „The man who mistook his wife for a hat“ („Der Mann, der seine Frau mit einem Hut verwechselte“), dass er sie bei einem merkwürdigen Spiel beobachtete, das ihnen anscheinend großes Vergnügen bereitete: Einer von ihnen nannte eine sechsstellige Zahl und beide lächelten und schienen diese Zahl zu genießen. Dann nannte der andere eine ebenfalls sechsstellige Zahl und wieder genossen sie diese Zahl, bis sie wieder eine nächste nannten. Der Autor schrieb sich die Zahlen auf und verglich sie einer Vielzahl von Tabellen, bis er seine Vermutung bestätigt sah: Bei allen diesen Zahlen handelte es sich um Primzahlen! Selbst ein Mensch, der sehr schnell rechnen kann, braucht einige Zeit, bis er eine Zahl darauf getestet hat, ob sie eine Primzahl ist oder nicht. Es ist also ein Rätsel, welche Methode diese Primzahlzwillinge hatten, um so schnell so große Primzahlen zu finden. Der Autor schummelte übrigens ein bisschen: Er suchte sich eine achtstellige Primzahl in seiner Liste und steuerte sie dem Spiel bei. Die Zwillinge dachten eine halbe Minute nach und lächelten plötzlich beide gleichzeitig. Es dauerte nicht lange bis sie in ihrem Spiel schließlich bei zwanzigstelligen Primzahlen angelangt waren – zumindest vermutet der Autor dies, weil so große Zahlen in seiner Liste nicht enthalten waren und er keine Möglichkeit sah, dies nachzuprüfen. Oliver Sacks äußert einige Vermutungen, wieso die Zwillinge gleichzeitig so begabt und so zurückgeblieben sein konnten. Für einen Mathematiker ist das Interessante daran, dass uns die Zwillinge einen der vielen Hinweise darauf geben, dass uns die Mathematik noch immer sehr rätselhaft ist, obwohl wir schon so viel über sie zu wissen glauben. Man könnte sich zum Beispiel fragen, ob es nicht einfach am Aufbau unseres Gehirnes liegt, dass wir Zahlen mit vielen Additionen und Multiplikationen testen müssen, um zu wissen, ob sie eine Primzahl ist.

Vielleicht ist in diesem Artikel ein wenig klargeworden, dass die Mathematik immer noch viele Fragen aufwirft. Seien es Fragen, die schon seit langem bestehen oder solche, die erst jetzt gefunden werden. Solche, die sich einfach anhören, aber doch schwierig in ihrer Beantwortung sind, oder solche, bei denen man schon viel wissen muss, um allein die Frage zu verstehen.

Oder auch solche, die sehr einfach sind und sofort nach Aufstellung der Frage beantwortet werden. Dann besteht die Kunst darin, die richtigen Fragen zu stellen. Und schließlich gibt es, wie uns die Zwillinge zeigen, auch Fragen nicht innerhalb der Mathematik, sondern *über* die Mathematik, wie wir sie betreiben.

Vielleicht gelingt es euch ja, später einige dieser Rätsel zu lösen.

Dieser Artikel entstand im Rahmen eines Praktikums am Max-Planck-Institut für Mathematik in Bonn, Deutschland. Die Autorin dankt vielmals für die Möglichkeit, an diesem Institut mit seiner konzentrierten und inspirierenden Arbeitsatmosphäre einen Monat verbringen zu dürfen. Für die fachlich hervorragende und liebenswürdige Betreuung gebührt großer Dank Herrn Dr. Pieter Moree. Auch Herrn Paul-Marion Tegelaar sei für wertvolle Hinweise gedankt.